REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	
Concours d'aptitude au professorat de l'enseignement secondaire	
EPREUVE : SESSION DE NOVEMBRE 2004	
EPREUVE : MATHEMATIQUE	**DUREE:** 4 heures

Exercice

1- Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par y_n la solution positive de l'équation $y = 1 + \frac{n}{y}$.

a- Donner l'expression de y_n.

b- Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $\frac{n}{y_{n-1}} \leq \frac{n+1}{y_{n-1}}$.

2- Soit (x_n) la suite de nombres réels définie par

$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$ pour $n \geq 1$.

a- Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $y_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1}$.

b- En déduire que $x_n \backsim \sqrt{n}$ lorsque $n \to +\infty$.

3- Une application σ de $\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ est appelée involution si elle vérifie $\sigma \circ \sigma = id$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par F_n l'ensemble des involutions de $\{1,2,...,n\}$ dans $\{1,2,...,n\}$ et on note a_n le nombre d'éléments de F_n.

a- Montrer que $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$ pour $n \geq 2$.

b- Soit $X_n : F_n \to \mathbb{R}$ la variable aléatoire qui à toute involution σ de F_n associe le nombre de points fixes de σ.

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ l'espérance $E(X_n)$ de X_n est donnée par

$$E(X_n) = \frac{na_{n-1}}{a_n}.$$

c- En déduire que $E(X_n) \backsim \sqrt{n}$ lorsque $n \to +\infty$.

Problème

Première partie

1- Etablir les inégalités suivantes

$1 + x \leq \exp(x)$ si $x \geq 0$

$1 + x \geq \exp(-2|x|)$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$.

2- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\prod_{k=0}^{n}(1+x_k)\right| \leq \exp(\sum_{k=0}^{n}|x_k|)$.

b- Montrer que si $|x_k| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $p \leq k \leq q$ alors

$\prod_{k=p}^{q}(1+x_k) \geq \exp(-2\sum_{k=p}^{q}|x_k|)$.

c- Montrer que pour tout $q \geq p \geq 0$, $\left|\prod_{k=p}^{q}(1+x_k) - 1\right| \leq \prod_{k=p}^{q}(1+|x_k|) - 1$.

3- Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur K à valeurs réelles. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(1+g_k(x))$, $x \in K$.

Montrer que si la série $\sum_k |g_k|$ converge uniformément sur K alors la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K. On écrira alors

$P(x) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+g_k(x)) = \prod_{k=0}^{+\infty}(1+g_k(x))$, $x \in K$.

Deuxième partie

On considère la suite des nombres réels $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$\varepsilon_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n$ et $\varepsilon_{2n+1} = -\varepsilon_n$.
On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n x^n$, $|x| < 1$.

1- Montrer que $f(x) = (1-x)f(x^2)$, $|x| < 1$.

2- Montrer que le produit $\prod_{n=0}^{+\infty}(1-x^{2^n})$ converge uniformément sur tout compact de $]-1, 1[$.

3- Montrer que $f(x) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1-x^{2^n})$, $|x| < 1$.